Відновлення гравіпотенціалу за модулем його градієнта в задачі Алексідзе

Пропоную вашій увазі результати дослідження нової нелінійної граничної задачі гравіметрії, яка змінює усталені поняття про аномалії сили тяжіння і матиме за вдалої реалізації широке коло застосувань (*слайд 1*).

Для вирішення задач вивчення фігури, внутрішньої будови, глибинної геодинаміки Землі слід знати розподіл значень потенціалу сили тяжіння, значень градієнта цього потенціалу або значень модуля цього градієнта. Цей розподіл можна отримати з фундаментальних властивостей функцій, що описують гравітаційну взаємодію, і вимірів. Створена теорія відновлення потенціалу в глобальній області за слідами потенціалу або слідами його похідних на границі області. Але здійсненню глобальних побудов заважають наступні проблеми і труднощі (*слайд 2*):

- відсутні *точні граничні дані* для реалізації класичної схеми відновлення в глобальній області потенціалу як розв’язку однієї з граничних задач Діріхле, Неймана чи змішаної (Стокса-Молоденського) для рівняння Лапласа;
- реальна поверхня Землі не співпадає з референц-еліпсоїдом, тому гранична умова в задачі Молоденського наближена, і нев’язка, яка містить інформацію про похибку задачі Молоденського для заданої моделі, неліквідна, і сягає ~ 7 мГал, або понад 2% від повної спостереженої аномалії сили тяжіння (ця задача генерує досить грубі наближення);
- не існує способу вимірів гравітаційного потенціалу, а виміри його похідних на поверхні Землі дорогі, зате накопичені у великих обсягах дані гравімагнітних зйомок, що значеннями приростів модуля градієнта потенціалу;
- у класичних задачах ці дані можна використати лише як *наближені граничні умови*, що забезпечує визначення потенціалу з гарантованою точністю лише в локальній області малої міри;
- відновлення потенціалу в глобальній області цим шляхом приречене на невдачу – розв’язки відповідних граничних задач визначені в кожній локальній області з точністю до невизначеної сталої, залежної від геометрії (розмірів і форми) локальної області;
- для „склеювання” локальних рішень відсутні які-небудь розумні критерії;
- під гравітаційним полем розуміють вертикальну похідну потенціалу сили тяжіння, тоді як воно тотожне значенням модуля градієнта потенціалу сили тяжіння;
- напрям вектора сили тяжіння невідомий, через що задачу перерахунку поля не можна в загальному випадку звести до лінійних задач математичної фізики.

Тому задача відновлення потенціалу за значеннями модуля його градієнта, сформульована М.А. Алексідзе, є більш, ніж актуальною. Алексідзе вважав, що „*вивчення питань розв’язності та єдиності цієї граничної задачі ... має принципове значення для гравіметрії, оскільки відповість на питання: чи можливе точне однозначне обчислення вектора прискорення сили тяжіння в зовнішньому просторі на основі точного визначення модуля вектора прискорення сили тяжіння на замкнутій поверхні, яка цілком охоплює всі тяжіючі маси, і яка мінімальна додаткова інформація потрібна для однозначності?*” [1, с. 65] (*слайд 3*). Він довів, що у плоскому випадку задача знаходження гармонічної функції, модуль градієнта якої задано на замкнутому контурі, не має єдиного розв’язку.

Нині у нас є можливість позитивно відповісти на питання, поставлене Алексідзе, та внести суттєві доповнення щодо нюансів розв’язності задачі Алексідзе та акцентів її практичного застосування. Але перед цим варто детальніше означити деякі результати математичного моделювання аномалій сили тяжіння.

Властивості модуля градієнта потенціалу (МГПСТ) досліджувалися епізодично, і не в останню чергу, через те, що досі панує необґрунтована точка зору, ніби виміряні аномалії сили тяжіння – це граничні значення або гармонічних функцій (у задачах гравірозвідки), або гармонічних функцій і їхніх похідних (у задачах геодезичної гравіметрії). У задачах гравірозвідки, де розглядають області малої міри (щодо розмірів Землі), такий підхід ефективний і доцільний, а в інших задачах він вимагає спеціального обґрунтування.

Розглядаючи аномалії сили тяжіння, закартовані на невеликих ділянках земної поверхні і обумовлені неглибоко розташованими джерелами, К. Юнг рекомендував вважати їх у першому наближенні значеннями „вертикальної” складової V_z притяжіння збурювального тіла (тобто, замінити граничні дані у вигляді значень МГПСТ значеннями гармонічної функції потенціалу V_z). При цьому не зауважено, що похибка такої підміни ростиме разом з розмірами області, де зосереджені аномалієтвірні об'єкти. Таке тлумачення гравіаномалій в епоху становлення геофізичних методів відкрило широкі можливості в інтерпретації даних за розвинутою теорією гармонічних і аналітичних функцій. З тих пір граничні задачі Діріхле й Неймана для рівняння Лапласа зайняли чільне місце в теорії прямих і обернених задач граві- і магніторозвідки.

Захоплення теорією, збудованою на базі лінійних граничних задач потенціалу і гармонічних функцій настільки сильне, що у дослідники лишили поза увагою зауваження М. А. Алексідзе в задачі редукування значень сили тяжіння: аномалії сили тяжіння, що сприймалися всіма від К. Юнга як гармонічні функції, такими по суті не є.

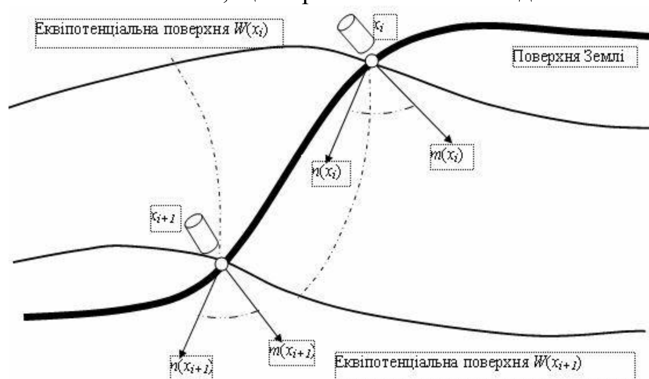


Рис. 1. Розходження векторів реальної і нормальної сили тяжіння.

Точні граничні умови в класичних задачах відновлення потенціалу формуються слідами потенціалу або його похідних. Але виміри потенціалу або вектора напруженості сили тяжіння на фізичній поверхні Землі пов'язані з надзвичайними технічними і економічними труднощами, нездоланними у осяжному майбутньому. Накопичені гравіметричні дані, але за допомогою гравіметрів виміряють тільки прирости МГПСТ, а не значення певної складової градієнта потенціалу, як це часто розуміють. При вимірах гравіметри встановлюють в кожній точці земної поверхні за рівнем на еквіпотенціальній поверхні, що перетинає поверхню Землі в цій точці (*слайд 4*), але просторова орієнтація гравіметрів ніяк не фіксується і

лишаються невідомими нахили приладів при їхньому зміщенні від пункту до пункту на профілі. Нахили приладів, обумовлені різною кривизною кожної з еквіпотенціальних поверхонь, що проходять через зазначені пункти і непаралельних одна одній, можна описати через приріст кута між нормалями перетнутих у точці поверхонь Землі і еквіпотенціальної, або ж безпосередніми вимірами значень спрямовуючи косинусів. Але ні ці, ні жодні аналогічні величини, які визначають напрям сили тяжіння, не вимірюють в точках земного рельєфу через виняткову складність таких спостережень в польових умовах. Розходження цих напрямів в реальних умовах коливається від 0″ до 40″ і може призвести до того, що глибинні неоднорідності, які зумовлюють ці розходження, не відображатимуться в класичних аномаліях.

Реальний результат гравіметричних вимірів – прирости абсолютних значень прискорення сили тяжіння, які відповідають приросту модуля вектора сили тяжіння між еквіпотенціальними поверхнями у точках земного рельєфу. Якби на поверхні Землі (рівняння якої є заданим) крім значень МГПСТ і внутрішньої нормалі до поверхні вимірювався і напрям градієнта, нелінійну граничну задачу відновлення потенціалу сили тяжіння можна було б звести до розв’язання лінійної зовнішньої задачі Неймана для рівняння Лапласа.

Самі значення МГПСТ для простого шару, як доведено працями Якимчика, негармонічні, неперервні, на ляпуновській поверхні задовольняють диференціальному рівнянню сили тяжіння типу Клейна-Гордона (*слайд 5*)

$$\Delta g(x) - a^2(x) g(x) = \begin{cases} -4\pi f \left|\nabla \sigma(x)\right|, & x \in G^- \\ 0, & x \in G^+. \end{cases}$$

зі змінним коефіцієнтом $a^2(x)$, що описує кривизну поля. Якби функція $a^2(x)$ була відома, воно стало б лінійним, і для нього з граничними даними значень сили тяжіння легко б вирішувалась задача Діріхле для замкнутої області – зручний апарат перетворень МГПСТ, що виникають у прикладних задачах теорій фігури Землі і тлумачення гравіаномалій. Однак, маємо у розпорядженні лише обмежену інформацію про цю функцію, що відразу ж істотно звужує можливості даного способу перетворень $g(x)$.

При перетині густинних границь перші і другі похідні МГПСТ зазнають розривів неперервності, а самі значення МГПСТ лишаються неперервними, а їхні особливі точки на границях мають вигляд „кутових", „повернення", „самоперетину", тощо.

На підставі даних $g(x)$ *не можна сконструювати точні граничні дані для жодної з лінійних класичних задач теорії потенціалу,* у тому числі й для задач Стокса-Молоденського для рівняння Лапласа або Діріхле для рівняння сили тяжіння. Для точного рівняння в глобальній області можна сформулювати лише наближені граничні умови, або скласти тільки наближене лінійне рівняння для точних граничних даних.

В обох випадках не можна одержати з високою точністю розв’язок задачі в глобальній області; його пошук – першочергова проблема теорії МГПСТ. Зауважмо особливість означення аномалії в теорії МГПСТ (*слайд 6*).

Загалом уточнену модель гравіаномалії в теорії МГПСТ описує вираз $\delta g(x) = g(x) - \gamma(x) - 2g(x)\sin^2\dfrac{\vartheta(x)}{2}$, де $\gamma(x)$ – нормальне значення сили тяжіння, яке відповідає *відомому розподілу мас* усередині сфероїда, $\vartheta(x)$ – кут між нормалями у точці спостережень (відхилення виска). Якщо нормальний сфероїд і розподіл мас у ньому обрані вдало, відхилення виска у районах зі „спокійним" рельєфом не перевищує 60″, і оцінка зверху останнього доданка у означенні аномалії не перевищує величини $2g(x)\sin^2\dfrac{\vartheta(x)}{2} < 0{,}05$ мГал. Тому аномалії задані як різниця $\delta g(x) = g(x) - \gamma(x)$, що за виглядом співпадає з класичним означенням аномалії, але істотно відрізняється тим, що нормальні значення сили тяжіння тісно зв'язані з конкретним — *правильним* — розподілом мас всередині сфероїда.

Це означення аномалії відрізняється від класичного: в класичній схемі аномалії визначають як *відхилення* реального поля сили тяжіння Землі від деякого його *осереднення*, яке є певною апроксимацією поля сфероїда з *невідомим розподілом мас* усередині нього. Відсутність інформації про розподіл нормальних мас ускладнює інтерпретацію гравіаномалій.

Похибка продовження аномалій сили тяжіння внаслідок *заміни субгармонічної функції гармонічною функцією* залежить від *кривизни* еквіпотенціальних поверхонь поля, *величини* аномалій і *міри* локальної області, у яку здійснено продовження (*слайд 7*). По суті, це заміна рівняння сили тяжіння типу Клейна-Гордона рівнянням Лапласа. За відомої амплітуди аномалій похибки відхилення субгармонічної функції від гармонічної функції у локальних областях коливаються в межах $4{,}78 \le \varepsilon \le 290{,}6$ мГал. Похибка продовжених аномалій як гармонічних функцій в зовнішню область за умови, що амплітуди продовжуваних аномалій не перевершують 150 мгал, для сфероїда, який апроксимує земну поверхню, з параметрами $a = 6378{,}2$ км, $b = 6356{,}9$ км, матимемо $3{,}67 \le \varepsilon \le 73{,}41$ мГал. При цьому вказані величини ще можуть бути занижені. Порівнюючи точне аналітичне значення аномалії для сфери з обчисленим з інтегралу Пуассона, маємо відносну похибку ~ 33%, тому методи аналітичного продовження гармонічних функцій для локалізації аномалій від окремих тіл, незастосовні в глобальній області. Отже, *похибки* заміни функції, що задовольняє в локальній області рівнянню аномалій сили тяжіння, функцією, гармонічною в тій же області, сягають, залежно від виду трансформації, *недопустимих величин*.

Оцінки похибок трансформацій в локальних областях, що навіть перетинаються між собою, не дають змоги оцінити загальну похибку трансформації в об'єднанні областей. Якщо в одній точці відхилення виска $\vartheta(x)$=60″, а в іншій точці $\vartheta(x)$=0″, то при переході від однієї локальної області до іншої істинна аномалія відрізнятиметься від класичної на величину $\delta g(x) = 2\gamma(x)\sin\dfrac{\vartheta(x)}{2} \approx 285{,}25$ мГал, навіть якщо класична аномалія дорівнює нулю в обох точках.

Перетворення поля в кожній з областей при однаково рівних нулю класичних аномаліях за правилами трансформації гармонічних функцій не дає можливості виявити істинну аномалію, яка сягає величин, порівняних зі значеннями трансформованих аномалій навіть у районах зі спокійним рельєфом. Апроксимації аномалій гармонічними функціями з гарантованою точністю можна виконати тільки в локальних областях, тому методи гравіметрії, попри їхню розмаїтість і загальність, дають змогу ефективно вирішувати за заданими аномаліями ту чи іншу прикладну задачу виключно в областях малої міри.

Локальну область застосування методів інтерпретації аномалій сили тяжіння, розвинених на базі теорії гармонічних функцій потенціалу, можна поширити на вивчення глибинної регіональної структури Землі лише шляхом аналітичного продовження модуля його градієнта. Через це задача відновлення потенціалу за значеннями модуля його градієнта – одна з найактуальніших проблем гравіметрії.

Кризова ситуація, що виросла з невідповідності можливостей лінійної апроксимації аномалій, не усвідомлена інтерпретаторами і теоретиками, які всупереч дослідженням М.А. Алексідзе, завзято не бачать „білі плями” у використанні методів теорії лінійних граничних задач потенціалу для тлумачення аномалій МГПСТ. Нелінійна гранична задача визначення потенціалу за значеннями МГПСТ, позитивне розв’язання якої зняло б усі накопичені проблеми, досі не посіла належного їй місця серед проблем теорії інтерпретації геофізичних вимірів.

Уперше її сформулював М. А. Алексідзе як для зовнішню нелінійну задачу для *точного* рівняння Лапласа і *наближених* граничних даних – виміряних значень сили тяжіння (МГПСТ) на обмеженій ділянці земного рельєфу, що є частиною границі локальної області, для якої ставилася задача, і „вгаданих” значень сили тяжіння на інших границях, які обмежують область (*слайд 8*). В такому вигляді вона не має єдиного розв’язку.

Для успішного її розв’язання А.В. Чорний запропонував таку альтернативу (*слайд 9*):

- відшукання такого точного диференціального оператора, який анулює значення модуля градієнта потенціалу поза областю розташування тяжіючих мас, і розв’язання для цього оператора відповідної лінійної граничної задачі для рівняння Лапласа;
- постановка такої *нелінійної* граничної задачі для рівняння Лапласа, в крайових умовах якої безпосередньо задіяні точні значення сили тяжіння.

Результатом першого підходу є постановка і розв’язання зовнішньої задачі Діріхле з даними на поверхні Ляпунова для *лінійного* диференціального рівняння типу Клейна-Гордона (яке моделює значення аномалій МГПСТ в області, не зайнятій тяжіючими масами) з невідомим змінним коефіцієнтом, що відповідає обраному нормальному потенціалу. Цей *наближений* спосіб (бо змінний коефіцієнт рівняння сили тяжіння, для якого збудована теорія, відомий лише першими наближеннями, які характеризують кривизни нормальних полів з еквіпотенціальними поверхнями у вигляді сімейств концентричних сфер і конфокальних еліпсоїдів) модернізований у дисертації А.І. Якимчика. Для відновлення потенціалу притяжіння за значеннями МГПСТ за умови, що відновлюваний потенціал не надто ухиляється від заданого, знайдена послідовність розв’язків задачі Неймана для рівняння Лапласа, які визначають збурювальний потенціал.

Інший підхід якраз і полягає у вирішенні сформульованої Алексідзе задачі, але з граничними даними на класі поверхонь Ляпунова за умови, що відновлюваний потенціал не дуже відхиляється від заданого. Доведено, що задача Алексідзе для рівняння Лапласа коректна на множинах витокоподібно поданих функцій потенціалів простого шару, розповсюджених на випуклих поверхнях Ляпунова (*слайд 10*).

Для визначення густини потенціалу простого шару, за допомогою якого однозначно розв’язується задача Алексідзе розробено ряд алгоритмів (*слайд 11*)

Алгоритм 1. $\sigma_2(x)+\int\limits_{\partial y} K_1(x,\xi;\sigma_1)\sigma_2(\xi)dS_\xi = b(x,\sigma_1)$,

оскільки ядро рівняння і його права частина залежать від густини, для її визначення придатний ітераційний процес

$$\sigma_{1,0}(x)=g(x),\ \sigma_{2,0}(x)=0,\ x\in\partial y,\ \sigma_{1,n+1}(x)=\sigma_{1,n}(x)+\sigma_{2,n}(x),\ \sigma_{2,n+1}(x)=A_1[\sigma_{2,n}(x)],\ n=\overline{0,\infty}$$

де $A_1[\sigma_{2,n}(x)]=b(x;\sigma_{1,n})-\int\limits_{\partial y} K_1(x,\xi;\sigma_{1,n})\sigma_{2,n}(\xi)dS_\xi$.

Алгоритм 2. $\sigma_2(x)+\int\limits_{\partial y} K_1(x,\xi;\sigma_1)\sigma_2(\xi)dS_\xi = b_1(x,\sigma_1)$, де $b_1(x;\sigma_1)=\left(g^2(x)-F_1(x;\sigma_1)-F_1(x;\sigma_2)\right)/\sigma_1(x)$.

для визначення послідовних наближень густини потенціалу (3) можна запропонувати такий ітераційний процес

$$\sigma_{1,0}(x)=g(x),\ \sigma_{2,0}(x)=0,\ x\in\partial y,\ \sigma_{1,n+1}(x)=\sigma_{1,n}(x)+\sigma_{2,n}(x),\ \sigma_{2,n+1}(x)=A_2[\sigma_{2,n}(x)],\ n=\overline{0,\infty},$$

де $A_2[\sigma_{2,n}(x)]=b_1(x;\sigma_{1,n})-\int\limits_{\partial y} K_1(x,\xi;\sigma_{1,n})\sigma_{2,n}(\xi)dS_\xi$.

Алгоритм 3. $\sigma_{2,n+1}(x)+\int\limits_{\partial y} K_1(x,\xi;\sigma_{1,n})\sigma_{2,n+1}(\xi)dS_\xi = b_1(x,\sigma_{1,n}),\ \sigma_{2,n}(x)=\sigma_{1,n+1}(x)-\sigma_{1,n}(x),\ n=\overline{0,\infty}$;

$\sigma_{1,0}(x)=g(x),\ \sigma_{2,0}(x)=0,\ x\in\partial y$.

Практичні застосування розв’язків задачі Алексідзе можуть бути наступними (*слайд 12*)

Уточнення фігури Землі. На поверхні Землі задані значення $g(x)$ і початкове наближення фігури Землі Θ^0. На *i*-му наближенні поверхні Θ^i збурювальний потенціал дорівнює $W^i(x_1,x_2)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Theta^i}\frac{\sigma_i(\xi,x_2)}{|x-\xi|}dS_\xi - U_0(x),\ x_1\in\Theta^i,\ x_2\in\partial y$, де $U_0(x)$ – нормальний потенціал, густина $\sigma_i(x_1,x_2),\ x_1\in\Theta^i,\ x_2\in\partial y$ є розв'язком рівняння

$$\sigma_i^2(x_1,x_2)+\frac{\sigma_i(x_1,x_2)}{\pi}\int\limits_{\partial y}\frac{\cos(m,p)}{|x-\xi|^2}\sigma_i(\xi,x_2)dS_\xi+\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\partial y}\int\limits_{\partial y}\frac{\sigma_i(\xi,x_2)}{|x-\xi|^2}\frac{\sigma_i(\eta,x_2)}{|x-\eta|^2}\cos(p,q)dS_\xi dS_\eta = 4g^2(x_2),$$

а аномальна висота за відомою формулою Брунса $\xi^i(x_1)=\xi_0^i(x_1)=W_0^i(x_1,x_2)/\gamma(x_1),\ x_1\in\Theta^i,\ x_2\in\partial y$ визначає поверхню *i+1*-го наближення форми Землі за формулою $\Theta^{i+1}=\Theta^i+\Delta\Theta^i(\xi^i)$. На *i*-му кроці обчислюємо Θ^i – наближення поверхні Землі, густину $\sigma_i(x_1,x_2)$, і потенціал $W^i(x_1,x_2)$, за формулою Брунса – наближення форми $\xi^i(x_1),\ x_1\in\Theta^i$ геоїда, згодом – наступне наближення Θ^{i+1} і так далі – до заданої точності.

Відновлення магнітного потенціалу. Якщо магнітний потенціал – сума $V(x)=U(x)+T(x)$ нормального $U(x)$ і

збурювального $T(x)$ магнітного потенціалу для даної епохи, відновлення магнітного потенціалу $V(x)|_{x=0}$ за заданими на границі значеннями модуля його градієнта $Z(x)=|\mathrm{grad}\,V(x)|$, можна звести до ітераційного процесу відновлення збурювального потенціалу

$$V_j^{(i+1)}(x)=\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}+\frac{\partial T_{i+1}(x)}{\partial x_j},\ V_{jk}^{(i+1)}(x)=\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_i \partial x_k}+\frac{\partial^2 T_{i+1}(x)}{\partial x_j \partial x_k},$$

де $\frac{\partial T_{i+1}(x)}{\partial x_j}=-\frac{1}{4\pi}\int_{\partial y}\frac{x_j-\xi_j}{|x-\xi|^3}\delta_{i+1}(\xi)dS_\xi$, $\frac{\partial^2 T_{i+1}(x)}{\partial x_j \partial x_k}=\frac{3}{4\pi}\int_{\partial y}\frac{(x_j-\xi_j)(x_k-\xi_k)}{|x-\xi|^5}\delta_{i+1}(\xi)dS_\xi$,

а спрямовуючі косинуси для наступного наближення модуля градієнта магнітного потенціалу $Z_{i+2}(x)=Z_{i+1}(x)-\omega^2\sum_{k=1}^{3}(n_{i+1},x_k)x_k$,

де $\cos(n_{i+1},x_k)=V_k^{(i+1)}(x)/Z_{i+1}(x)$, потрібен для обчислення чергового наближення збурювального магнітного потенціалу

$$T_{i+2}(x)=Z_{i+2}(x)\cos(n_{i+1},m)-\gamma(x)\cos(\nu,m).$$

Наступне наближення магнітного потенціалу $V^{(i+2)}(x)=U(x)+T_{i+2}(x)$.

Нормальний потенціал – аномальне поле однорідно намагніченої сфери. Окрім даних $Z(x)$ ($\Delta T_a(x)$) відомі рівняння поверхні Землі і вектор одиничної нормалі $m(x)=\cos(x_k,m_x)$, $k=1,2,3$ до неї майже в будь-якій її точці, і нормальне поле $U(x)$.

Нормаль $\nu(x)=\cos(\nu,x_k)$ до еквіпотенціальної поверхні $U(x)=Cx$ дорівнює $\cos(\nu,x_k)=\frac{1}{\gamma}\frac{\partial U(x)}{\partial x_k}$ та значення

$\cos(\nu,m)=\sum_{k=1}^{3}\cos(\nu,x_k)\cos(x_k,m)$, де $\frac{1}{\gamma(x)}=|\mathrm{grad}\,V(x)|$.

Якщо поверхня Землі є множиною Ляпунова, то магнітний потенціал $V(x)$, $x\in y^+$ для даної епохи відновлюється однозначно за даними вимірювання величини напруженості $Z(x)$, $x\in\partial y$ магнітного поля цієї епохи.

Трансформація сили тяжіння. Для розв'язання задачі трансформації і перерахунку сили тяжіння формулюється така нелінійна гранична задача для потенціалу сили тяжіння:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0,\ x,y\in\partial y,\ \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2}=\psi(S).$$

Для розв'язання цієї задачі методом розкладу за неортогональними функціями застосовано ітераційний процес

$$\Delta U^k=0,\ \alpha_1(U^{k-1})\frac{\partial U'(x,y)}{\partial x}+\alpha_2(U^{k-1})\frac{\partial U'(x,y)}{\partial y}=\psi(S)$$

де U^k – k-те наближення розв'язку задачі, а коефіцієнти обчислюються з формул

$$\alpha_1(U^{k-1})=\frac{\frac{\partial U^{k-1}}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U^{k-1}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U^{k-1}}{\partial y}\right)^2}},\ \alpha_2(U^{k-1})=\frac{\frac{\partial U^{k-1}}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U^{k-1}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U^{k-1}}{\partial y}\right)^2}}.$$

Результати чисельних експериментів з ітераційного розв’язання нелінійної граничної задачі Алексідзе у плоскому випадку (*слайд 11*) були спрямовані саме на перевірку збіжності цього ітераційного процесу для моделі кулі.

Вирішено такі тестові зовнішні граничні задачі для рівняння Лапласа:

$$\Delta U=0,\ |\mathrm{grad}\,U\|_S=\frac{r}{x^2+y^2+z^2},\ \Delta U=0,\ |\mathrm{grad}\,U\|_S=\frac{r}{(x-r)^2+y^2+z^2}+\frac{r}{(x+r)^2+y^2+z^2},$$

де S – горизонтальна площина, $r=10$ і $z=5$ км. Точний розв'язок першої граничної задачі – $r/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, друга задача точного розв'язку не має.

Розв'язок з точністю 10^{-6} першої граничної задачі в 30 точках поверхні S на рівномірній мережі з кроком 10 км в області: -25 км $\le y\le$ 25 км, -25 км $\le x\le$ 15 км досягнуто за 5 ітерацій. Перше наближення для спрямовуючих косинусів задано таким чином: $\alpha_1(U_1)=\alpha_2(U_2)=0,\ \alpha_3(U_1)=1$, і $\alpha_1(U_1)=0.8,\ \alpha_2(U_2)=0,\ \alpha_3(U_1)=0.6$. На практиці точність визначення похідних U_x, U_y і U_z буде нижчою. Самі градієнти U співпадають з меншою точністю через погану обумовленість задач з граничними умовами, що містять похідні (для них несправедливий принцип максимуму). Цю обставину, непов'язану зі збіжністю ітераційного процесу, треба враховувати при вирішенні практичних задач.

Виявлено, що зовнішня гранична задача вирішується із задовільною точністю, якщо напрям градієнта на всій границі області складає з внутрішньою нормаллю гострий кут; крім того, похибка розв’язку зумовлена не поганою збіжністю ітерацій (їх число не перевищує 10), а поганою обумовленістю взагалі граничної задачі з косою похідною в граничних умовах задачі (напрям зовнішньої нормалі не має бути ортогональним до напряму косої похідної, що не виконується для всієї нескінченної поверхні у випадку точкового джерела).

При розв'язанні практичних задач шукаємо не потенціал W сили тяжіння, а потенціал U аномалії сили тяжіння, зв'язаний з W рівністю $W=U+V$, де V – відомий потенціал нормального значення сили тяжіння. За лінійних наближень граничних задач гравіметрії і магнітометрії такий перехід не змінює не лише рівняння, а й вигляд оператора граничних умов, який ще потребує додаткових досліджень

Основні висновки (*слайд 13*) на даному етапі можна сформулювати так:

можна вважати закритим питання можливості отримання поля у зовнішньому просторі з як завгодно високою точністю за відомим

розподілом значень модуля градієнта потенціалу сили тяжіння. Ця основна нелінійна задача граві- і магнітометрії обгрунтована в частині коректності її постановки для поверхні Ляпунова, і ще потребує допрацювання щодо обгрунтування чисельних аспектів алгоритмічних схем її розв’язку. Це важливо тому, що нелінійна апроксимація гравіполя не відображена в курсах гравіметрії, а ми демонструємо, що вона справедлива для вевного класу областей. Оскільки це зовнішня гранична задача, для її вирішення недоцільно вживати універсальні методи розв’язання граничних задач – скінченних різниць чи скінченних елементів. Труднощі чисельного розв’язання лавиноподібно зростають при складному рельєфі земної поверхні...

Дякую за увагу!